



TITLE:

# 粉体がいっぱいにつまった回転ドラム中におけるサイズによる分離 (複雑流体の数理)

AUTHOR(S):

栗津, 暁紀

---

CITATION:

栗津, 暁紀. 粉体がいっぱいにつまった回転ドラム中におけるサイズによる分離 (複雑流体の数理). 数理解析研究所講究録 1999, 1081: 123-137

ISSUE DATE:

1999-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/62726>

RIGHT:

## 粉体がいっぱいにつまった回転ドラム中におけるサイズによる分離

茨城大 理 栗津暁紀 (Akinori Awazu)

### §1. はじめに

大きさ、粗さの異なる粉体を混ぜることは、日常的に行われ、また工学的にも非一様な粉体を一様に混合する、という作業がしばしば必要であり、そのため昔から粉体の混合、分離について、多くの研究が行われている。この様な研究の一つとして、円筒の中に種類の異なる粉体を入れ、重力に対し垂直方向を軸にして回転させる(回転ドラム)、といった実験的研究が行われている。[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]

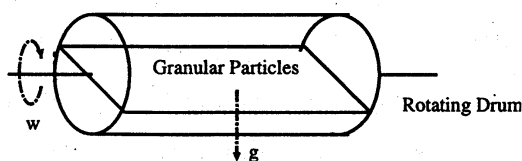


Fig.1 回転ドラムの図

しかしその様な研究により、一般に乾いた粉体は回転ドラム中でサイズによる分離を起こす、ということが知られている。またそのほかに、容器にいて垂直に振動させた場合、斜面を流した場合などでも、サイズによる分離がおこる事が実験的に知られている。[16,17] この様に、種類の異なる粉体は、一般に混ざりにくく相分離する、ということは粉体の持つ大きな特徴の一つである。

今回我々は、「回転ドラム中に2種類の大きさの粉体が、いっぱいにつまっているときのサイズ分離」の様子をシミュレーションし、簡単な解析を行った。これは従来よく研究が行われてきた、粉体がドラムの半分だけ占めている時 [1,2,3,4,5,8,9,10,11,12,13]、とは異なり、粉体に対する拘束が非常に強いため、分離が起こるとは考えにくかったが、最近実験によって確かめられた現象である。[6] また別の実験で、粉体がドラムにいっぱいにつまっている系特有の、分離の様子も見出されている。[7] まず次の章でこれまで行われてきた、粉体が半分程つまった回転ドラム中でのサイズ分離の実験、理論的研究を簡単に紹介する。また、粉体がいっぱいにつまっているときの回転ドラム中でのサイズ分離の実験を紹介し、これに対し従来の考察の延長では、説明に困難があることをしめす。そこで3章では、粉体がいっ

ばいにつまんでいるときの回転ドラムのシミュレーションを、具体的に行う。そしてその様子から4章では、この系における粉体の有効モデルを提案し、サイズ分離に対する、簡単な解析を行う。そして5章では、そのモデルの問題点、応用等にふれ、まとめる。

## §2. 回転ドラム系の従来の研究と最近の実験

### 2.1 粉体が半分だけつまった回転ドラムの実験

ドラム中に容積の半分程度の2種類のサイズの異なる粉体を入れ、重力と垂直な軸で回転させる。適当な回転速度を与えると、ドラム面と粉体の摩擦により、粉体層が回転方向に少し持ち上げられ粉体表面が斜めになり、その表面に定常的な粒子の流れが出来る。(ここで回転速度が小さすぎると、粉体層が定常的に持ち上がらないため、定常的な表面流が生じない。また、回転速度が大きすぎると、粉体が遠心力の影響を受け、大きな波のようなものが発生し、表面流は定常的にならない。) またこのとき粒子が流動している斜面のプロファイルは、平面ではなくS字型をしていることが知られている。[1,3,4,5,7]

実験によりこういった状況で、粉体はサイズ分離を起こす事が知られているが、定常状態に緩和する過程で、時間スケールの大きく異なる2種類の分離のパターンが現れることが知られている。まず回転をはじめてから比較的早い段階に、サイズの大きな粒子が円の外側、小さい粒子が中心付近に分布するような、半径方向の分離が起こる(半径方向分離、Radial Segregation)。そしてその分離の形成後しばらくすると、大きい粒子と小さい粒子が軸方向に縞状に分布するような分離が起こる(軸方向分離、Axial Segregation)。さらにこの縞状の分布パターンは、はじめその縞の幅が細く、多くの縞が形成されるが、時間がたつにつれ縞同士の融合が起こり、数が減り縞の幅は大きくなっていく。[1,3,4,5,10]

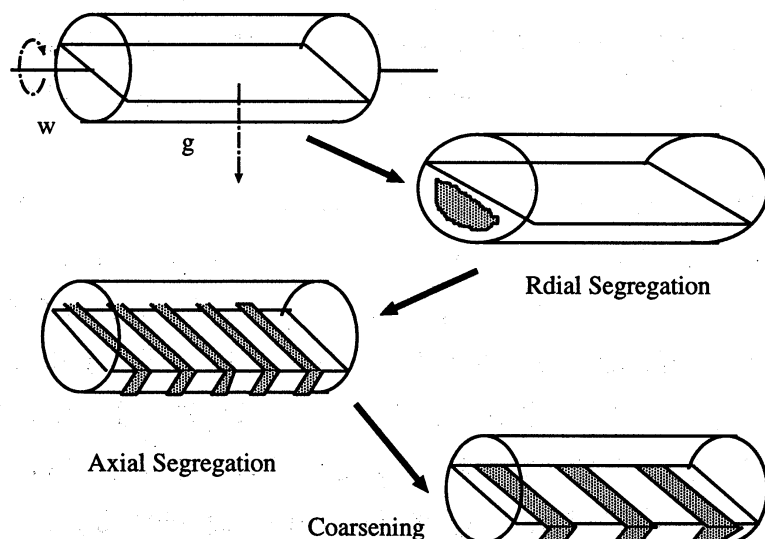


Fig.2 粉体が半分程入った回転ドラム系のサイズ分離の様子

この様に回転ドラム系では、ただサイズ分離を起こすのではなく、(1)時間スケールの異なる2種類の分布パターンが見られる、(2)特に軸方向分離は、分離過程が過冷却された合金の相分離に似た振舞いを示す、といった興味深い現象が見られる。[19]

## 2.2 粉体が半分だけつまった回転ドラムの理論的研究

このような実験的事実に対し、これまでに多くの理論的研究、例えばMDを用いた直接シミュレーション [13] やCAモデルを用いたシミュレーション [14]、偏微分方程式モデルを用いた解析、数値計算などが行われている。[10,11,12] それらの研究で用いられたモデルの大部分のものの大きな特徴として、粉体層の表面での粒子の流れ方が粒子の種類によって異なる、ということを取り入れている。具体的には、表面の斜面に粒子があるとき、粒子の種類によってその斜面に止まっていられる最大の角度、安息角 (The Angle of Repose) の違いを用いて考察が行われている。この安息角は、粒子が大きい程、摩擦が小さい程小さく、緩やかな斜面に対しても粒子は流れやすい。逆に粒子が小さい程、摩擦が大きい程、安息角は大きくなるので、粒子は相対的に流れにくくなる。

このような安息角の違いを用いたCAモデルによるシミュレーションによって、半径方向、軸方向のサイズ分離が柳田によって再現されている。[14] 更にこの様な「粉体表面での安息角の相対的な違い」を用いて偏微分方程式モデルが提案されて、解析がなされている。この様なものに、系を軸方向の1次元的に近似したモデル (小林、上田)[10]、実験的に知られている粉体表面の斜面のS字プロファイルも取り入れた、2次元モデル (早川、Puli)[11] といったものがある。小林、上田による偏微分方程式モデルは、1次元的に考えているため半径方向の分離を考える事は出来ないが、線形安定性解析、数値計算によって、軸方向のサイズ分離、縞同士の融合 (コースニング) が起こることが分かる。更に早川等の考察により、このモデルが1次元カーンヒリヤード方程式と等価である事が示されている。[12] また早川、Puli らの2次元モデルでは、実験的に知られている斜面のS字プロファイルについての考察を行い、それを取り入れたことにより、半径方向分離、軸方向分離形成過程などの実験的結果が非常によく再現され、説明、解析が進んでいる。

結局この様な、粉体が半分程つまっている回転ドラム系でのサイズ分離の、メカニズムを簡単にまとめると、以下のようなものである。斜面に大小の粒子が存在するとき、大きい粒子の方が安息角が小さく、流動しやすいので、より遠くまで流れる。よって、大きい粒子がドラムの円の外側に分布するようになり、相対的に小さい粒子が中心付近に分布する。この様に半径方向分離の形成は考えられる。またこのときの、軸方向の粒子の分布の違いによって生じる軸方向の斜面の勾配の違いにより、表面での粒子の軸方向の流れが生じる。このとき大きい粒子が少ない場所ほど、その斜面が急になるので更に大きい粒子がそこから流れて減少

し、小さい粒子の割合が大きくなっていく。この様にして、軸方向の分離が形成される。

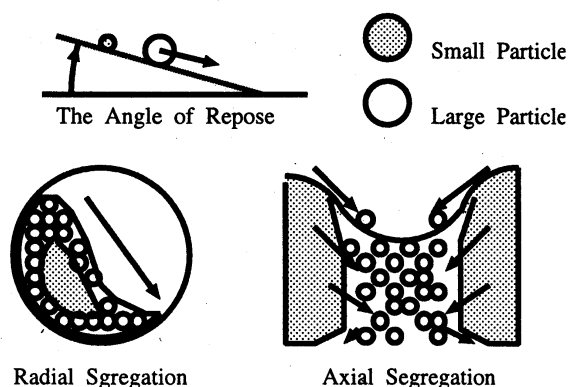


Fig.3 粉体が半分程入っているときの、半径方向、軸方向のサイズ分離の、簡単なメカニズム。

この様に、粉体が半分程つまっている回転ドラム系でのサイズ分離は、表面における粒子の安息角の違いが実質的に効いていると考えれば、ほぼ説明が出来ると考えられている。

### 2.3 粉体がいっぱいだった回転ドラムの実験

回転ドラム系において、安息角以外にサイズ分離に寄与しているものはないのであろうか。最近中川らによって回転ドラム系内に2種類の大きさの粉体をいっぱいに積めて回転させるという実験が行われた。それにより、Nuclear Magnetic Resonance Image (NMR I) を用いた粉体内部の観測の結果、この系においてもまず半径方向のサイズ分離が起こり、相当長時間立った後(数週間後) 軸方向のサイズ分離が形成されると報告されている。[6]

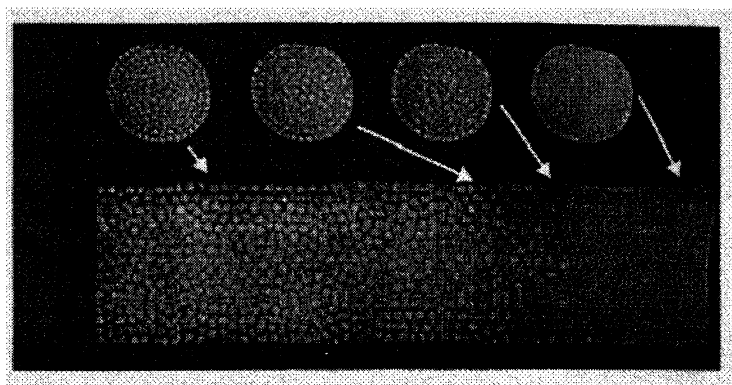


Fig.4 粉体がいっぱいに入っている回転ドラムにおけるサイズ分離の実験結果。これはNMR I を用いて断面を見ている。[6] からの抜粋。

この実験では、粉体がドラムにほぼいっぱいにつまっているため、粒子が流れる斜面がほとんどなく、安息角の違いによる影響はないと考えられる。それは実際、ドラムの中の半分以上を粉体が占めていると、回転させた際、中心付近の粒子は表面にでることが出来ない、

ということを考えれば分かる。したがって、この現象を、先程の理論の拡張によって理解しようとするのには、大きな困難があると考えられるため、粉体内部のダイナミックスを考慮に入れる必要がある。実際に中川らのNMR Iを用いた観測により、円の中心付近に分布している小さい粒子の塊が、ゆっくりと内部で移動している事などが見られている。[7] しかし軸方向の分離の際、半分だけつまっているときとは異なり、コースニングを起こす、という報告はされていない。また、軸方向分離も縞状の分離ではなく、大きい粒子の相と小さい粒子の相の2つの相が軸に沿って並ぶ、というものが報告されている。よってドラムに対し粉体が、半分だけつまっているときと、いっぱいにつまっているときとで、見られている現象が異なるものである、という可能性はある。

また中川等は、粉体がいっぱいにつまった2次元の円盤における、半径方向のサイズ分離に実験を行っている。[7,8] その実験により、回転速度により粒子の半径方向の分布に変化が見られることが見出された。具体的には以下のようなものである。円筒の半径を  $A$ 、回転角速度を  $\omega$  とし、重力加速度を  $g$  とすると、 $A\omega^2 < g$  のとき、つまり比較的ゆっくり回転させている時、大きな粒子が円の最も外側に分布し、小さい粒子が中心付近に分布する。それに対し  $A\omega^2 > g$  の時、つまり早く回転させている時は、小さな粒子が円の一番外側に分布し、大きな粒子は円の内側でドーナツ状に分布する。また回転速度を大きくすると、大きな粒子の分布する位置は更に内側に変化する。この現象は、3次元のドラムに対しても、同様の現象は見られると考えられる。この様に、この現象は粉体の分離の様子として物理的に興味深いだけでなく、これを利用することで、異なる種類の粉体を混ぜる、という困難な作業に対し何らかの助けになるのでは、という意味でも興味深い。

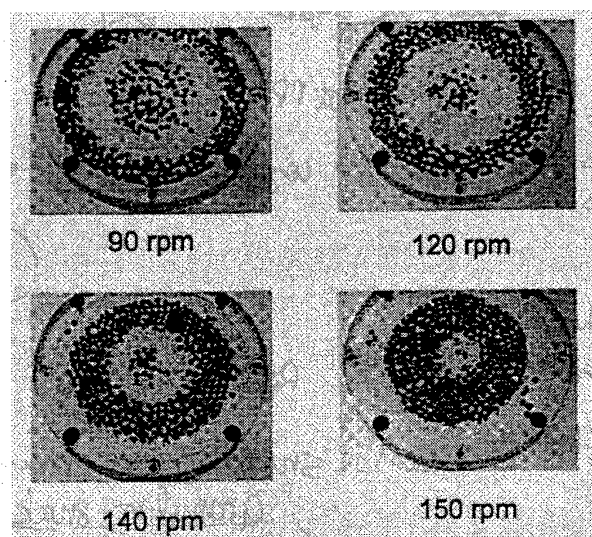


Fig.5 粉体がいっぱい入っている薄い回転円筒における、半径方向のサイズ分離の様子。120 rpm ~ 140 rpm の間で大きい粒子の分布位置が、円の外側から内側へ転移してい

る。[7]からの抜粋。

### §3. 粉体がいっぱい詰まった回転ドラムのシミュレーション

#### 3.1 シミュレーションの設定

先の章で述べたように、従来の粉体が半分だけつまっている時の回転ドラム系で提案されている理論を用いて、粉体がいっぱいにつまっている回転ドラム系でのサイズ分離を議論することは出来ないと考えられる。そこで系の特徴を見ていくために、まずMDを用いて直接シミュレーションを行い、現象の再現を試みる。

今回のシミュレーションは、3次元の円筒のその回転軸をすべて含む、2次元的な断面を取り出し、その2次元的な板の中に粒子を入れ回転させる、というような設定で行った。この設定は、粉体層の表面の流れを作らないためであり、これによって、各粒子の動ける方向は動径方向と軸方向のみになり、安息角の違いの効果を取り除くことが出来る。

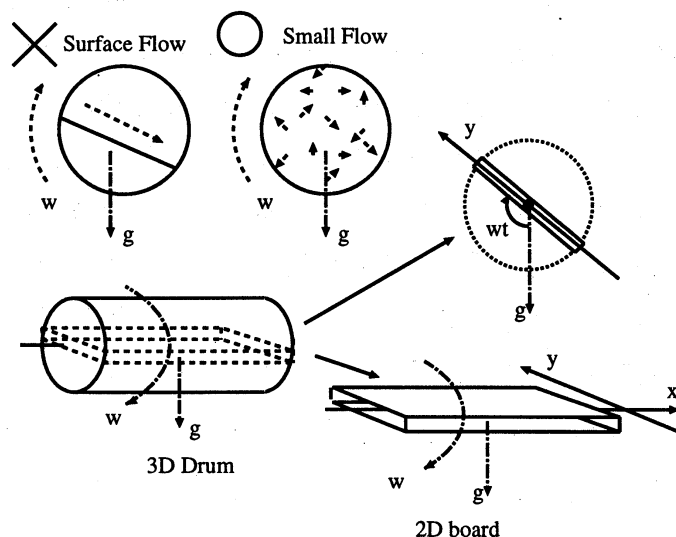


Fig.6 今回のシミュレーションの設定。表面での流れをなくすために、2次元直方体に粒子を入れて回転させる。

また、粉体が本当に完全につまっただけでは各粒子は動くことが出来ない。そのためシミュレーションにおいては、小さいながらもすき間があるとしている。そして各粒子は、その小さいすき間があることによって、少しずつ移動を行える。しかし当然、このすき間によって粒子が自由に大きく変位するといったことはない。(また実験においても、初期の設定の段階では完全につまんでいると考えられていても、実験を行ってしばらくすると、円筒の上部の方に、小さなすき間は生じる。しかしこのすき間によって表面流が発生しサイズ分離が起こる、ということがないことは前章の議論等からも分かる。)

各粒子は、2次元の板上に固定された座標系を用いて、以下のような方程式にしたがって

運動する。ここで、ある  $i$  番目の粒子の位置を  $\vec{r}_i(x_i, y_i)$ 、速度を  $\vec{v}_i(v_{x_i}, v_{y_i})$ 、粒子の半径を  $d_i$ 、質量は 1 とし、粒子の総数を  $N$  とする。また、回転軸方向に  $x$  軸、動径方向に  $y$  軸をとり、回転軸上で  $y = 0$  とする。

$$\ddot{\vec{r}}_i = - \sum_{j=1}^N \theta(d_i + d_j - |\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \{ \vec{\nabla} V(d_i + d_j - |\vec{r}_i - \vec{r}_j|) + \eta(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \} + \vec{F}_i \quad (1)$$

$$V(d_i + d_j - |\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = k(d_i + d_j - |\vec{r}_i - \vec{r}_j|)^{\frac{5}{2}} \quad (2)$$

(1) 式の右辺第一項目の  $\theta$  は step function であり、この項は粒子間の衝突による相互作用をあらわしている。基本的には田口によるソフトコアの粒子モデルであるが [15]、衝突した際の粒子間ポテンシャル  $V$  として (2) 式のものを選んだ。ここで  $k$  は粒子のバネ係数で、十分大きく、粒子がつぶれないようにとる。しかし系全体の振舞いは、この  $V$  の詳細にはよらないと考えられる。またこの一項目の最後の項は、粒子の衝突による散逸を表しており、今回は散逸として 2 つの粒子が接触した際、粒子間の相対速度に比例した粘性が働くとしている ( $\eta$  は粘性係数)。(1) 式の第二項  $\vec{F}_i$  は粒子に働く外力による力である。今回、粒子はほぼいっぱいにつまっているので、系全体は連続体として回転していると近似する。よって回転角速度を  $\omega$ 、重力加速度を  $\vec{g}$  とすると、各粒子は外力  $\vec{F}(F_x, F_y)$  として以下のような、動径方向に遠心力、重力を受ける。

$$F_{x_i} = 0 \quad (3)$$

$$F_{y_i} = y_i \omega^2 + g \cos(\omega t) \quad (4)$$

また境界条件として、端の壁には速度 0 の粒子が敷き詰められているとし、壁との衝突はその敷き詰められた粒子と相互作用するとする様にした。

### 3.2 シミュレーションの結果

以上の様な設定で、回転角速度が小さい場合、大きい場合についてシミュレーションを行っていく。初期条件として、大小の粒子をほぼ 1 : 4 の割合でランダムに配置した。粒子の平均半径比は 2 : 1 とし、半径には最高プラスマイナス 10 パーセントの揺らぎを与えている。これは実際 2 次元系では、半径が完全に等しい粒子を用いると、密度が高くなったときに格子を組んで固まってしまい、粒子が動かなくなってしまうためである。以下に初期の配置と十分に時間がたった後の粒子の分布の様子を Fig.7 に示す。



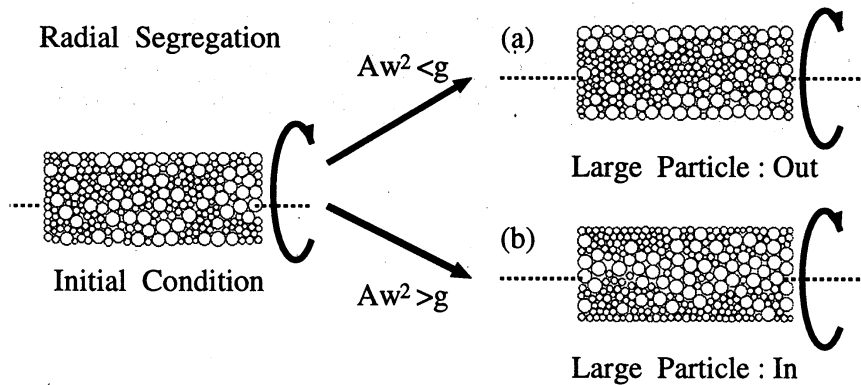


Fig.7 シミュレーションによって実現される、半径方向のサイズ分離の様子。実験結果と同様、回転角速度の増加によって、大きい粒子の分布位置が円の外側 (回転が遅いとき) から内側 (回転が速いとき) へ転移する。

この様にある程度時間がたつと半径方向にそって、大きい粒子と小さい粒子の分布の偏り、つまり半径方向のサイズ分離が見られる。その分布の特徴として、ドラムの半径を  $A$  とすると、 $Aw^2 < g$  の時、大きい粒子が上下 (ドラムの外側) に分布し、 $Aw^2 > g$  の時、大きい粒子が真中 (ドラムの回転軸付近) に分布する。そしてこのような分布の偏りは、粒子間に生じる小さなすき間を粒子が少しずつ移動することで生じる、非常に小さいが系全体に広がっている流れによって、引き起こされている。

今回シミュレーションでは、明確な軸方向サイズ分離は見られなかった。[18] これについて、今回のシミュレーションでは、(1) 系のサイズが小さい、(2) シミュレーションの時間がまだ短い、(3) 粒子のモデル化に問題がある、(4) 3次元的な効果が必要である、などといった問題点が原因である可能性はある。しかし特に  $Aw^2 < g$  の時、Fig.8 で見られる様に半径方向の分離が発生した際、長時間たっても大きな粒子の分布は軸方向に沿って一様ではない。これは初期条件における分布が反映されている訳ではなく、例えば内部での小さな粒子の流動により、外側に分布している大きな粒子が押し退けられ、非常に長時間かけて大きな粒子が縦に並んだ「腕」のような構造を形成し、ドラムの内部に進行して来る、または消滅する、といったことで起こる。

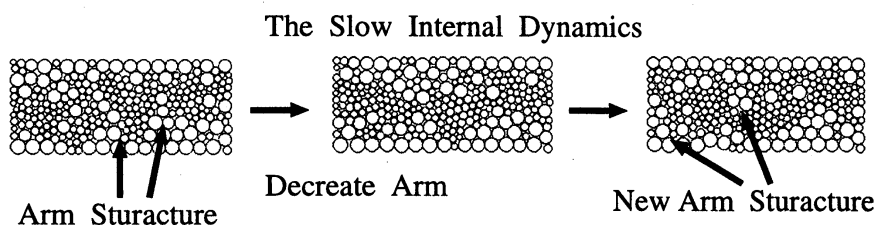


Fig.8a 半径方向分離が起きた後の長時間たつたときの様子。左から Fig.7(a) 形成までの時間の2倍、2.5倍、3倍。内部で「腕」の構造が形成、消滅を繰り返す。

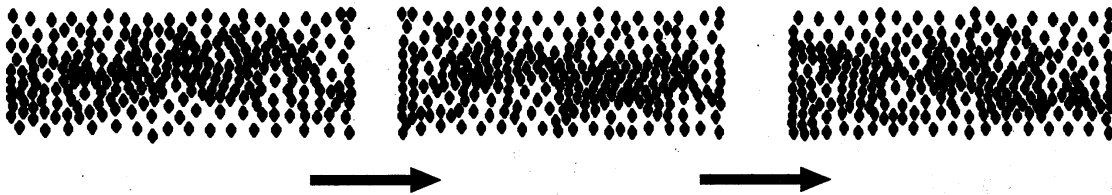


Fig.8b Fig.8a から更に時間がたったときの粒子の中心の分布。点の密度が高いところに小さい粒子、低いところに大きな粒子が分布している。左から Fig.7(a) 形成までの時間の 10 倍、15 倍、20 倍。

この様に、半径方向の分離がある程度起こった後でも、系は完全にその半径方向分離が完成するように発展していく、というよりもむしろ内部ではその半径方向分離を壊すような現象が見られる。こういった現象が実際の軸方向の分離に対し、何らかの関連性がある可能性はある。

#### §4. 粒子の運動のモデル化とそれを用いた解析

##### 4.1 粒子の運動の平均場的モデルとサイズ分離

前章では、MDを用いた直接シミュレーションによって、粉体のサイズ分離の様子を見た。それによって、粉体層の中に小量のすき間が存在すると、各粒子は、時間当り非常に小さな変位であるが動くことができ、それにより、非常に小さいが系全体に流れができ、そしてサイズ分離が起こることが見られた。

そこでこの章で我々は、前章のようなシミュレーションの結果を踏まえて、各粒子の運動に対し近似を行い簡単化したモデルを提案し、それを用いて粉体のサイズ分離についての簡単な解析を行う。

今回我々は粒子同士の衝突について、平均場的な近似を行う。今回扱っている様な系では、粒子同士の衝突が非常に頻繁であり、また粉体層の表面などと異なり、あらゆる方向の粒子との間に衝突が起こる。そこで、ある粒子にとって他の多数の粒子との衝突は、まずあたかも流体と相互作用しているかのように感じると考え、それに周りの粒子がマクロな粉体であるということを考慮に入れた、補正を行った。具体的に各粒子の運動について、以下のような方程式を立てる。ここでも、ある  $i$  番目の粒子の位置を  $\vec{r}_i(x_i, y_i)$ 、速度を  $\vec{v}_i(v_{x_i}, v_{y_i})$ 、粒子の半径を  $d_i$ 、質量は 1 とする。

$$\ddot{\vec{r}}_i = -\gamma_0(\rho(r_i))\gamma_1(d_i \frac{\vec{v}_i}{v_i} \vec{\nabla} \rho(r_i))\vec{v}_i + \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad (5)$$

ここで  $\rho(r)$  は、位置  $r$  における粒子の密度であり、その周りにいる粒子の局所的な空間に対する面積占有率で定義する。 $\rho(r)$  は、 $d_i$  よりも十分大きな半径  $dr$  の円を用いて、以下のよう

$$\rho(\vec{r}) \sim \frac{\sum_j \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\vec{d}\vec{r}} \delta(\vec{r}_j - \vec{r}') \pi d_j^2 d\vec{r}'}{\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\vec{d}\vec{r}} d\vec{r}'} \quad (6)$$

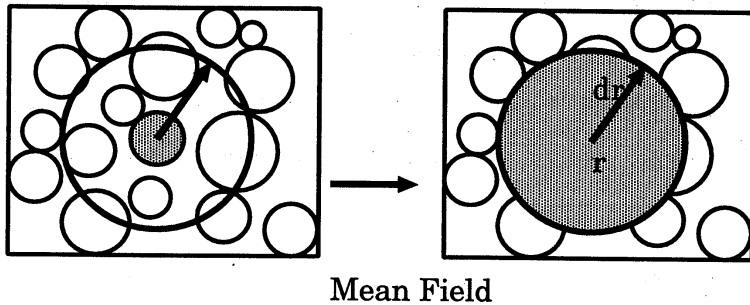


Fig.9 平均場的扱いの図

(5) 式の説明をする。右辺の第一項目は、粒子が周りの粒子から受ける抵抗力である。この項の  $\gamma_0(\rho)$  は、衝突に際し各粒子は周りの粒子を完全に流体と見做して相互作用している質点である、としたときの粘性係数を表している。ある点  $\vec{r}$  において、その点の周りに存在する粒子の密度が大きい程、衝突頻度が多くなるので、この粘性抵抗は大きくなると考えられる。よって粘性係数  $\gamma_0(\rho)$  は、粒子の密度が大きい程大きくなり、 $\rho \rightarrow 1$  で無限に発散するような関数であるとする。

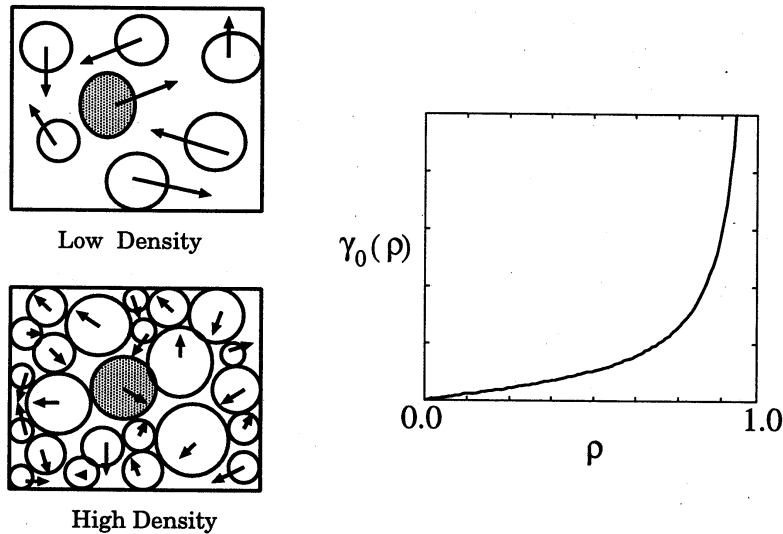


Fig.10 周りの粒子を、完全に流体として感じるとしたときの粘性抵抗の密度依存性。

そして  $\gamma_1(d_i \frac{\vec{v}_i}{v_i} \vec{\nabla} \rho(r_i))$  は、実際はマクロな粒子同士の衝突が起きている、という効果を具体的に取り込んだ、粒子の受ける抵抗に対する補正である。粒子間の衝突は非弾性的なので、衝突により粒子の分布は一様にはならず、局在する傾向がある。よってここでは具体的に、粒子の分布の偏りによる衝突頻度の方向依存性の効果を考慮に入れる。これにより次のような効果が働くと考えられる。粒子がもっていた位置より密度が高い方へ移動するときの方

が、低い方へ移動するときよりも衝突頻度が大きいため、粒子が受ける抵抗力は相対的に大きくなる。また粒子は実際大きさを持っており、その結果表面が大きいほうがより大きな抵抗を受ける。よって各粒子の受ける抵抗力は、 $d_i \frac{\vec{v}_i}{v_i} \vec{\nabla} \rho(r_i)$  に依存して増加すると考えられ、 $\gamma_1(d_i \frac{\vec{v}_i}{v_i} \vec{\nabla} \rho(r_i))$  を掛けるという形で、その効果を導入する。ここで、今回扱っているような系では、粒子がよくつまっているということから、 $\rho(\vec{r})$  は滑らかな関数であると仮定している。  $\gamma_1$  の形として、 $\gamma_1 > 0$  で  $d_i \frac{\vec{v}_i}{v_i} \vec{\nabla} \rho(r_i)$  に対しつねに増加関数であるとする。また相対速度  $\vec{v}_i$  が 0、もしくは密度勾配  $\vec{\nabla} \rho(r_i)$  が 0 ならばこの項の効果はなくなるので  $\gamma_1(0) = 1$  となるとする。

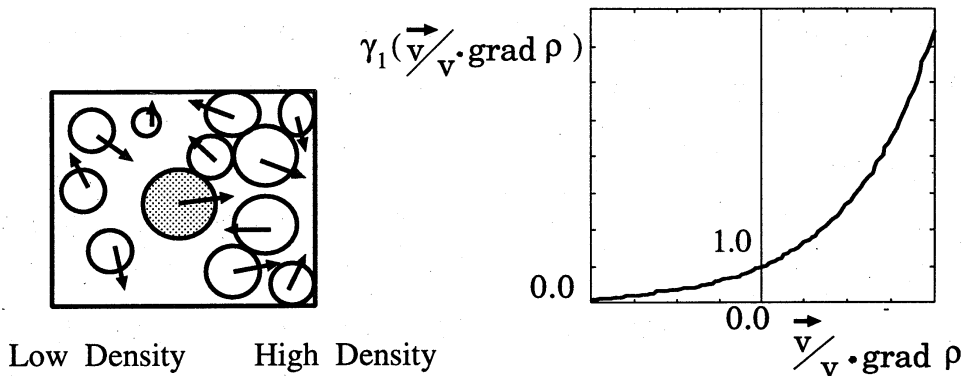


Fig.11 マクロな粒子同士の衝突であることを考慮に入れた補正の効果。

右辺第二項目の  $\vec{F}_i$  は粒子  $i$  が受ける外力である。右辺第三項目の  $\vec{R}_i$  は、衝突によるノイズの効果を表している。このノイズも粒子間の衝突によって起こるものであるので  $\gamma_0$ 、 $\gamma_1$  と  $\vec{R}$  との間には、何らかの関係があると考えられる。しかし今回の様な系では、粒子同士の衝突は非弾性であるので、当然いわゆる揺動散逸関係は成り立たない。しかし各粒子は外力  $\vec{F}$  によって駆動されているため、 $\vec{R}$  は  $\vec{F}$  に依存した強さ、方向性を持つと考えられ、 $\gamma_0$ 、 $\gamma_1$ 、 $\vec{F}$  との間は何らかの関係があるとは考えられる。

この様な方程式をもとに簡単な解析を行うことで、粉体のサイズ分離について以下のような考察が行われる。今回粒子は系全体によくつまっている、ということで  $|\vec{\nabla} \rho(r)| \ll 1$ 、 $\gamma_0(\rho) \sim \gamma_0 = \text{const} \gg 1$  と仮定する。よって  $\gamma_0(\rho)$  の条件より過減衰型の方程式

$$0 = -\gamma_0(\rho(r_i)) \gamma_1(d_i \frac{\vec{v}_i}{v_i} \vec{\nabla} \rho(r_i)) \vec{v}_i + \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad (7)$$

を用いる。更に  $|\vec{\nabla} \rho(r)| \ll 1$  という条件より、(9) 式を  $\frac{\vec{v}_i}{v_i} \vec{\nabla} \rho(r) = 0$  の周りでテーラー展開し、 $\vec{v}_i$  について逐次近似を行い、 $\vec{\nabla} \rho(r)$  について 1 次までとると、 $\vec{v}_i$  は

$$\vec{v}_i = \frac{\vec{F}_i + \vec{R}_i}{\gamma_0} - \gamma_1'(0) d_i \frac{\vec{F}_i + \vec{R}_i}{\gamma_0} |\vec{\nabla} \rho(r_i)| \quad (8)$$

と得られる。ここで  $\gamma_1'$  は  $\gamma_1$  の  $\frac{\vec{v}_i}{v_i} \vec{\nabla} \rho(r_i)$  による一階微分である。この式より以下のことが分か

る。まず大小2つの粒子を、全く同じ状況におく。系に密度の勾配が存在しないとき、各粒子はサイズに関係なく外力にしたがって同じ速度で移動する。しかし系に密度勾配が生じると、外力大きさ、勾配の大きさに比例して密度の低い方向への力を受ける。更にこの力は粒子のサイズが大きい程大きい。つまり、サイズの異なる粒子が同じ状況に置かれたとき相対的に、小さな粒子が外力の働く方向へ、大きな粒子が粒子の密度の低い方へ変位していき、分離が起こることがこれより分かる。そして(9)式より、サイズ分離の早さは、系にかかる外力の大きさ、サイズの差に依存して早くなっていくことも分かる。またこの考察より粒子にかかる外力として、例えばホワイトノイズ等の様な方向性ないものを用いると、系に密度勾配が形成されないため、分離が起こらないことが分かる。つまり外力の方向性、それにもなって生じる密度分布の不均一性が、サイズ分離には必要なのである。

#### 4.2 半径方向サイズ分離の説明

前章で行った簡単な解析により、「相対的に、小さな粒子が外力の働く方向へ、大きな粒子が粒子の密度の低い方へ、変位していく」ということが分かった。よってそれを用いて、粉体がいっぱいにつまっている回転ドラムにおける、半径方向のサイズ分離、回転角速度依存性等の説明を試みる。シミュレーションより各粒子にかかる外力の効果は、円筒の動径方向のみを考慮すればよいことが分かるので、それを利用する。

ここで、3章の用いたような2次元的な板に固定した座標系(回転軸上で $y=0$ )を用いると、各粒子が受ける動径方向の力は

$$F_{y_i} = y_i w^2 + g \cos(wt) \quad (9)$$

である。ここからは $y > 0$ の領域を考え、その領域において粒子の変位が外向きになるか、内向きになるかを議論する。 $(y < 0$ の領域は $wt$ を $wt + \pi$ に置き換えれば同じ話になる。)そうすると $F_{y_i} > 0$ の領域では外向き、 $F_{y_i} < 0$ の領域では内向きの力が働いていることになる。そしてその各領域において、小さい粒子はその力の方向に、大きい粒子はそれによってできた密度の薄い領域に向かって、相対的に移動する。そこで、それぞれの領域がどのように分布しているかを、以下みていく。まず $(X, Y) = (-y \sin(wt), -y \cos(wt))$ とおくと、 $(X, Y)$ 平面上で $F_{y_i} < 0$ の領域は円

$$X^2 + (Y - \frac{g}{2w^2})^2 = (\frac{g}{2w^2})^2 \quad (10)$$

の内側の領域である。これを円1とする。また回転ドラムの円の半径を $A$ とおくと、ドラム内の領域は $X^2 + Y^2 < A^2$ で与えられ、これを円2とする。こうしてこの2つの円の間関係を見ていくと、まず、 $\frac{g}{w^2} > A$ の時、円1は円2から $Y$ の正の方向にはみ出す。これはつまりドラム上方では常に中心方向の力が働いていることを意味しており、それによってドラム上

方の壁側に粒子の密度の薄い領域が現れる。また逆に  $\frac{g}{w^2} < A$  の時は、円1は円2の中に完全に含まれる。このとき円1の上方部分が、粒子にかかる力の向きが  $y$  の増加に対して、内向きから外向きに変化する境界になっている。よってこの部分に、粒子の密度の薄い領域が現れる。

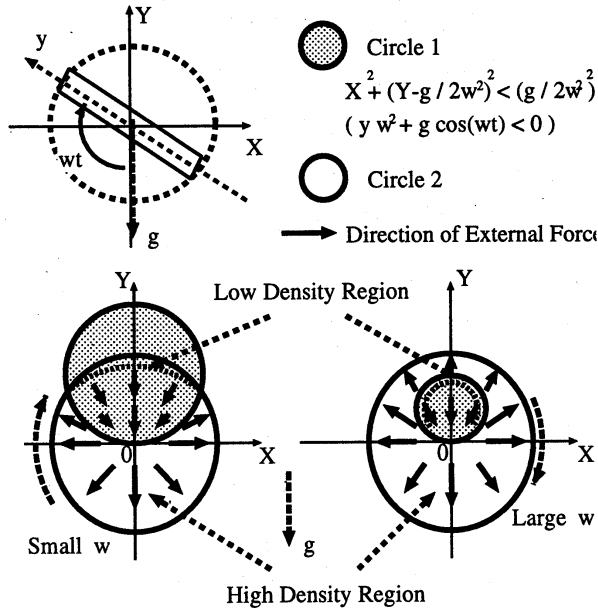


Fig.12 各粒子に対し半径方向にかかる力と、それによる粒子密度の分布。

前章の考察により、力の働く方向に小さい粒子、密度の低いほうに大きい粒子が変位していく。またドラムの方では上方に比べ密度が高く、ほぼ一定につまんでいると考えられるので、こういった形の粒子の移動は、上方で起こるものと比べ無視できる。よって  $\frac{g}{w^2} > A$  の時、つまり大きい粒子は、ドラムの回転が遅く、一番外側で受ける遠心力が、重力より小さい時は壁際に、 $\frac{g}{w^2} < A$  の時、つまり回転が速くなり一番外側で受ける遠心力が、重力より大きくなると、ドラムの内側に分布することが分かる。また更に回転が速くなり  $w$  が増加すると、大きい粒子の分布する位置は更に内側に変位する。結局その分布の傾向は、重力と遠心力の釣り合いから議論でき、大きな粒子が分布する、動径方向の最も外側の位置を  $\bar{y}$  は

$$\bar{y} = A \cdots (Aw^2 < g) \quad (11)$$

$$\bar{y} = \frac{g}{w^2} \cdots (Aw^2 > g) \quad (12)$$

となり、分布位置が外側から内側へ転移する臨界加速度  $w_c$  は  $w_c = (\frac{g}{A})^{\frac{1}{2}}$  と与えられる。

これはシミュレーションにおいても見られた傾向である。また、実際2次元円筒の実験においても、ここで議論されてきたことと同様の傾向が見られている。

## §5. まとめ

今回、MDを用いたシミュレーションと、粒子間の相互作用を単純化した近似モデルを使った簡単な解析を行い、それぞれを照らし合わせることで、粉体がいっぱいつまっているときの回転ドラム中におけるサイズ分離、について考察を行った。

まずシミュレーションによって、粒子間の小さなすき間による、粉体層全体のゆっくりとした流動によって半径方向のサイズ分離が起こることが確認された。この分離のメカニズムは、従来のドラムに半分だけ粉体が入っているときのサイズ分離のメカニズムとは、根本的に異なるものである。軸方向分離に関しては、今回のシミュレーションでは、明確な分離は見られなかった。しかし、回転速度が比較的遅いとき、半径方向の分離がある程度起こった後に、内部の粉体の流動によって半径方向の分離の状態が少しずつ壊され、大きな粒子同士が集まり、回転軸に対し垂直に伸びた「腕」の様な構造が形成、消滅を繰り返し、それによって、大きな粒子の軸方向の分布が不均一になる、という現象が見られた。つまりこれは、半径方向に分離した状態が系にとって完全に安定な状態というわけではなく、違う分布パターンへ転移する可能性を示唆している。この様な現象と実験で見られた軸方向サイズ分離の間には何らかの関係があると考えられ、これに関しては、系のサイズについてのこと等のテクニカルな問題も含めて、これからさらに議論する必要がある。

更に粒子の相互作用を平均場的に扱う、各粒子の簡単なモデル方程式を提案し、比較的粉体の密度の高い場合におけるサイズ分離の、簡単な解析を行った。それにより比較的粉体の密度場合、粉体のサイズ分離は小さい粒子が外力の働いている方向、大きい粒子が密度の低くなっている方向へ、相対的に移動することで起こることが分かり、またその分離の速さは、半径の差、と外力の強さに比例することが分かった。そしてそれを用いて、さらに回転ドラム系における外力の場を考慮することで、粉体がいっぱいにつまった回転ドラム系の、半径方向のサイズの説明を行い、大きい粒子の分布位置の、回転角速度依存性を議論した。

今回ここで用いた粒子のモデル方程式は、直感的に導入したものであるため、導出等に多数問題点がある。例えば、実際の粉体の間で働く力と(摩擦力など)平均場的な粘性の関係が明白ではない、というよりもそもそも粉体が多数存在する際に、各粒子間にどのような力が働くかということ自体、自明ではない。また、この考え方は、粉体の表面などでは明らかに適用できない。更に、分からないものをすべてノイズの項に押し込めているが、そのためこのノイズの正体が明確ではない。他にもいくらでも出てくるだろう。しかし、この方程式に対し相当な発展性も期待している。(9)式などは比較的密度が高く、粒子間での衝突が頻繁に起こるような状況であれば、適用できる。よって実際、振動層や雪崩が起きているような場合においても、粒子間での衝突は非常に頻繁に起こると考えられるので、こういった系

におけるサイズ分離を議論する際にも、この式はかなりの有効性を持つと考える。

実際、粉体系は比較的密度が高いときに、興味深い粉体特有の現象が現れる。よって、今回の議論ではまだまだ不十分であるが、今後このようなモデルの導出、改良を行うことは、粉体系一般を議論するにあたり大きな意味を持つと考える。

## 謝辞

この原稿を書くに当り、議論、助言を頂いた、西森拓氏(大阪府立大学)とそのグループの方々、早川尚男氏(京都大学)と氏による粉体レクチャーのメンバーの方々に、感謝致します。またセミナー等を通して実験結果等を紹介して下さった中川昌美氏(Colorado School of Mines)に感謝します。この研究は、茨城大学SVBLの援助を受けて行われました。

- 
- 1) O.Zik, D.Levine, S.G.Lipson, S.Shtrikman and J.Stavans, Phys. Rev. Lett. **73**, 644 (1994);
  - 2) Y.Oyama, Bull. Inst. Phys. Chem. Res. Jpn. Rep. **18**, 600 (1939).
  - 3) S.Das Gupta, D.V.Khakhar and S.K.Bhatia, Chem. Eng. Sci. **46**, 1531 (1991); Powder Technol. **67**, 145 (1991).
  - 4) M.Nakagawa, Chem. Engg. Sci. **49**, 2544 (1994).
  - 5) K.Nishiura and M.Nakagawa, 第8回計算流体シンポジウム講演論文集 (1997 - 7) 411.
  - 6) M.Nakagawa, NATO ASI Series, Series E: Applied Sciences - Vol.350 Physics of Dry Granular Media (H.J.Herrmann, J.-P.Hovi, and S.Luding) 703
  - 7) M.Nakagawa, private communication
  - 8) G.H.Ristow and M.Nakagawa, cond-mat preprint no. 9806067.
  - 9) K.M.Hill and J.Kakalios, Phys. Rev. E **49**, 3610 (1994); Phys. Rev. E **52**, 4393 (1995);  
K.M.Hill, A.Caprihan and J.Kakalios, Phys. Rev. Lett. **78**, 50 (1997).
  - 10) K.Ueda and R.Kobayashi, 第8回計算流体シンポジウム講演論文集 (1997 - 7) 413.
  - 11) S.Puli and H. Hayakawa, (preprint)
  - 12) H. Hayakawa, Private Communication
  - 13) S.Sakamoto, Journal of the Society of Powder Technology Jpn Vol**35** 7 (1998) 508
  - 14) T.Yanagida 日本物理学会秋の分科会 in Kobe (1997) 講演概要集 727
  - 15) Y.-h.Taguchi, Phys. Rev. Lett. **69**, 1367 (1992);
  - 16) A.Rosato, K.J.Strandburg, F.Prinz and R.H.Swendsen, Phys. Rev. Lett. **58**, 1038 (1987);  
J.B.Knight, H.M.Jaeger and S.R.Nagel, Phys. Rev. Lett. **70**, 3278 (1993).
  - 17) Harnan A.Makse, Shlomo Havlin, Peter R. King and H.Eugene Stanley, Nature **379** (1997) 379
  - 18) 研究会当日は再現に成功していると報告したが、設定に不備が見つかったため、計算をやり直した。その今回結果について今回報告を行った。
  - 19) 例えば 岩波講座 現代の物理学 19 高分子物理、相転移ダイナミクス (土井正男、小貫明著) など。